PART2　直線と平面の垂直

例題

四面体OABCにおいて，$OA=3$，$OB=OC=4$，$\angle BOC=\angle COA=\angle AOB=60^\circ$ である。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面ABC上に点Hをとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表すとき，s，t，u に成り立つ関係式を求めよ。

(3) 線分OHと平面ABCが垂直であるとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

Point Pickup

練習

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$ である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，平面 ABC 上に点 O から垂線 OH を下ろしたとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

第 16 講　PART2 確認問題

1　四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，

$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$，$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ である。

点 O から平面 ABC に垂線を引き，平面 ABC との交点を

H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{c}$$

である。

PART2　直線と平面の垂直

例題

四面体OABCにおいて，OA＝3，OB＝OC＝4，∠BOC＝∠COA＝∠AOB＝60° である。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面ABC上に点Hをとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表すとき，s，t，u に成り立つ関係式を求めよ。

(3) 線分OHと平面ABCが垂直であるとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

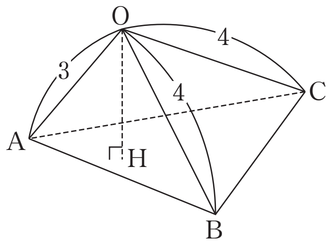
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°=3\times4\times\dfrac{1}{2}=6$,

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°=4\times4\times\dfrac{1}{2}=8$,

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60°=4\times3\times\dfrac{1}{2}=6$

(2) 点Hは平面ABC上の点であるから　$s+t+u=1$ …… ①

(3) OH⊥平面ABCより　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$-3s+10t+2u=0$ …… ②

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

$s\vec{c}\cdot\vec{a}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$-3s+2t+10u=0$ …… ③

①，②，③より　$s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{1}{6}$，$u=\dfrac{1}{6}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

練習

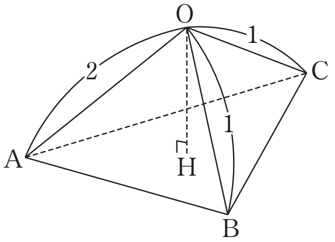
四面体OABCにおいて，$OA=2$，$OB=OC=1$，$\angle AOB=\angle AOC=60^\circ$，$\angle BOC=90^\circ$ である。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，平面 ABC 上に点 O から垂線 OH を下ろしたとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^\circ=1\times2\times\dfrac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおくと，点 H は平面 ABC 上の点より



　　$s+t+u=1$ …… ①

OH ⊥ 平面 ABC　より　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　より　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

　　$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$3s+u=0$ …… ②

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ より $(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$

　　$s\vec{c}\cdot\vec{a}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

よって　$3s+t=0$ …… ③

①，②，③より　$s=-\dfrac{1}{5}$，$t=\dfrac{3}{5}$，$u=\dfrac{3}{5}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=-\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

第16講　PART2 確認問題 解答

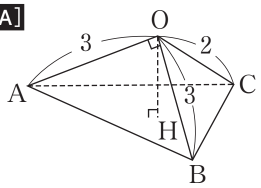
1　**[正解]** ア：1，イ：5，ウ：1，エ：5，オ：3，カ：5

[解説]

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ$$ **[A]**

$$=3\times 2\times\frac{1}{2}=3$$



同様に　$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$　(s，t，u は実数)とおくと，

点 H は平面 ABC 上の点だから，

$$s+t+u=1 \quad \cdots\cdots①$$ **[B]**

OH ⊥ 平面 ABC より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ **[C]**

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$$s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$-9s+9t+3u-3u=0$$

$$-s+t=0 \quad \cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから

$$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$$

$$s\vec{a}\cdot\vec{c}-s|\vec{a}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u|\vec{c}|^2-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$3s-9s+3t+4u-3u=0$$

$$-6s+3t+u=0 \quad \cdots\cdots③$$

①，②，③ より **[D]**

$$s=\frac{1}{5},\quad t=\frac{1}{5},\quad u=\frac{3}{5}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

[A]　2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

[B]　同一直線上にない 3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) と点 P($\vec{p}$) において，
点 P が平面 ABC 上にある
⟺ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，
$s+t+u=1$

[C]　OH ⊥ (平面 ABC)
⟺ OH ⊥ AB かつ OH ⊥ AC

[D]　①，②，③の連立方程式を解く。